حل نموذج بجروت

(805)-482

موعد مُتعذرين شتاء 2022

طاقم الرياضيات

معهد IQ

سؤال 1 :

(P) ① نبرهن : $a_{n+1}-a_n=\underbrace{\overbrace{d}^{\text{فرق المتوالية}}}_{\text{ثابت}}$ وبذلك نبرهن ان المتوالية حسابية .

من المعطى $a_{n+1}=2(n+1)+1=2n+3$

$$\Leftarrow\quad a_{n+1}-a_n=2n+3-(2n+1)=\boxed{2}=d$$

② نعوض $n=1$:

$$a_1=2\cdot 1+1=3$$

$$\leftarrow\quad \boxed{a_1=3}$$

$\boxed{\text{فرق المتوالية} = d = 2}$ من البند السابق .

ب) معطى $S_n=1443$.

نجد n بواسطة التعويض في معادلة المجموع :

$$S_n=\frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)\cdot d\right)$$

$d=2$, $a_1=3$ $\rightarrow$ $1443=\frac{n}{2}\left(2\cdot 3+(n-1)\cdot 2\right)\ /\cdot 2$

$$2886=n\underbrace{(6+2n-2)}_{4+2n}$$

$$/:2\quad 0=2n^2+4n-2886$$

$$0=n^2+2n-1443$$

حسب الدستور :

$$\frac{-2\pm\sqrt{4-4(-1443)(1)}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm 76}{2}\quad\begin{array}{l}\rightarrow \boxed{n_1=37}\\ \rightarrow \boxed{n_2=\cancel{-39}}\end{array}$$

ملغي ، n عدد موجب بالضرورة .

$\Leftarrow$ اذا $\boxed{n=37}$

(ج)

$$b_{n+1} - b_n = \text{فرق المتوالية}$$

$$\rightarrow b_{n+1} = 1+3\cdot(a_{n+1}) = 1+\overset{6n+9}{3(2n+3)} = \underline{6n+10}$$

$$\rightarrow b_n = 1+3\cdot a_n = 1+\overset{6n+3}{3(2n+1)} = \underline{6n+4}$$

$$\Rightarrow b_{n+1} - b_n = 6n+10-(6n+4) = 10-4 = \underline{6}$$

اذاً الفرق في المتوالية الجديدة هو $\underline{6}$.

(د) $\underline{n=37}$.

الفرق بين كل مكان فردي والذي يليه هو مرتين فرق المتوالية،

اذاً : الفرق بين كل حد زوجي والذي يليه $= 2\cdot 6 = 12$

عدد الحدود الفردية هو: $\frac{37+1}{2} = \underline{\underline{19}}$.

نجد الحد الاول في المتوالية الجديدة

$$b_1 = 1+3a_1 = 1+3\cdot 3 = \underline{10}$$

نريد ايجاد مجموع الحدود: $b_1, b_3, \ldots, b_{37}$ (19 حد).

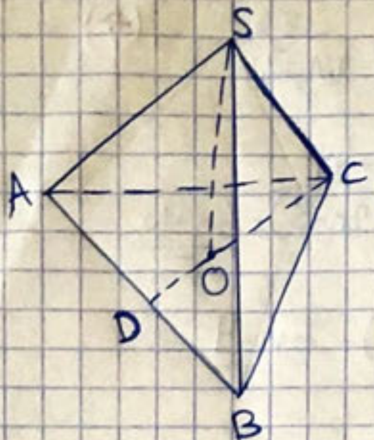
حسب معادلة المجموع،

$$S_{b_n} = \frac{n'}{2}(2\cdot b_1 + (n'-1)\cdot d')$$

$$n'=19,\ d'=12 \rightarrow S_{b_n} = \frac{19}{2}(2\cdot 10 + (19-1)\cdot 12) = 2242$$

اذا ← $\boxed{S_{b_n} = 2242}$

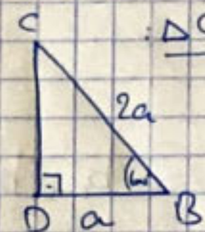
سؤال 2 :



(أ) معطى ABC مثلث متساوي الاضلاع :

$$AB = BC = AC = \frac{6a}{3} = 2a$$

ΔCDB :



$\measuredangle CBD = 60^\circ$
لان المثلث متساوي الاضلاع .

$DB = \frac{AB}{2} = a$ لان CD معطى انه ارتفاع .

حسب فيثاغوروس :

$$(CD)^2 + (DB)^2 = (BC)^2$$

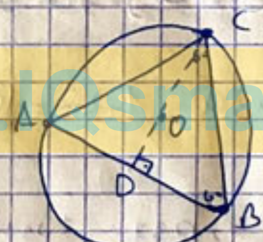
$$(CD)^2 + a^2 = 4a^2$$

$$\sqrt{(CD)^2} = \sqrt{3a^2}$$

$$\boxed{CD = \sqrt{3}a}$$

(ب) معطى $CO = 4\sqrt{3}$

بما انه كل مثلث يمكن حصره داخل دائرة , اذاً نحصر المثلث ABC داخل دائرة :



حسب النظرية : للمضلع المنتظم المحصور داخل دائرة , نقطة التقاء الارتفاع (ارتفاع العمود) مع القاعدة (المثلث ABC) هو مركز الدائرة .

من هنا O هو مركز الدائرة .

اذاً OC هو نصف قطر الدائرة .

ΔACB : حسب قانون sin الموسع :

$$\frac{AC}{\sin(60^\circ)} = 2R$$

$$\frac{2a}{\sin(60^\circ)} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin(60)} = R$$

$$\Leftarrow \underline{R = 4\sqrt{3} = OC}$$

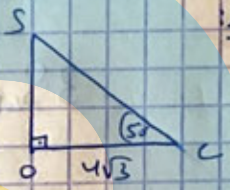
$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3} \quad / \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 3}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{a=6}$$

(ب) ① من المعطى $\angle SCO = 50°$

$\underline{\triangle SCO}$:



نحسب قانون cos:

$$\frac{OC}{SC} = \cos(50°)$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{SC} = \cos(50°)$$

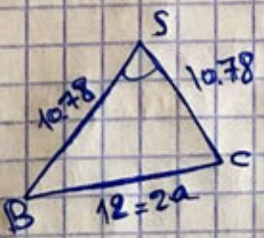
$$\frac{4\sqrt{3}}{\cos(50°)} = SC$$

$\boxed{SC = 10.78}$ طول الضلع الجانبي للهرم.

② نحسب مساحة المثلث BSC ، ومن هنا مساحة غلاف الهرم هي $\underline{3\cdot S_{BSC}}$

$\underline{\triangle BSC}$:

$BS = SC$ لان كل الاحرف الجانبية للهرم متساوية.



نجد $\angle BSC$ بحسب قانون جيب التمام:

$$(BC)^2 = (BS)^2 + (SC)^2 - 2\cdot BS\cdot SC\cdot\cos(\angle BSC)$$

$$(12)^2 = (10.78)^2 + (10.78)^2 - 2\cdot 10.78\cdot 10.78\cdot\cos(\angle BSC)$$

$$144 = 232.4168 - 232.4168 \cdot \cos(\measuredangle BSC)$$

$$-88.4168 = -232.4168 \cdot \cos(\measuredangle BSC) \quad / : -232.4168$$

$$0.38 = \cos(\measuredangle BSC)$$

$$\boxed{\measuredangle BSC = 67.64^\circ}$$

نجد مساحة ΔBSC حسب قانون sin المساحات:

$$S_{\Delta BSC} = \frac{BS \cdot SC \cdot \sin(\measuredangle BSC)}{2} = \frac{(10.78)^2 \cdot \sin(67.64^\circ)}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta BSC} = 53.74}$$

$3 \cdot S_{\Delta BSC} =$ مساحة غلاف الهرم

$\Rightarrow$ مساحة غلاف الهرم $= 3 \cdot 53.74 = 161.2$

$\boxed{161.2 =}$ مساحة غلاف الهرم

سؤال 3:

$$f(x) = \cos(2x) + 2\cdot\cos(x) + 3 \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

(أ) نجد أولاً المشتقة:

$$f'(x) = -\sin(2x)\cdot 2 + 2(-\sin(x))$$

$$f'(x) = -2\sin(2x) - 2\sin(x) \quad (*)$$

حسب النظرية:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$$

$$(*) \quad f'(x) = -2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot 2 - 2\sin(x)$$

$$f'(x) = -4\sin(x)\cdot\cos(x) - 2\sin(x)$$

$$\boxed{f'(x) = -2\cdot\sin(x)\left(2\cos(x)+1\right)}$$

نجد نقاط شبه لنقاط قصوى: $f'(x)=0$

$$0 = -2\sin(x)\cdot(2\cos(x)+1)$$

$\sin(x)=0$ أو $2\cos(x)+1=0$

$x = \pi k$

$k=0$ $\boxed{x=0}$

$k=1$ $\boxed{x=\pi}$

$k=2$ $\boxed{x=2\pi}$

$2\cos(x) = -1$

$\cos(x) = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$; $x = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$

$k=0$: $\boxed{x = \frac{2}{3}\pi}$; $\boxed{\cancel{x = -\frac{2}{3}\pi}}$ خارج المجال

$k=1$: $\boxed{\cancel{x = 2\frac{2}{3}\pi}}$ خارج المجال ; $\boxed{1\frac{1}{3}\pi = x}$

← اذا نقاط الشبه في المجال $0 \le x \le 2\pi$: $0, \frac{2}{3}\pi, \pi, 1\frac{1}{3}\pi, 2\pi$.

نجد احداثي y لنقاط الشذ:

$$f(0) = \overbrace{\cos(0)}^{1} + \overbrace{2\cdot\cos(0)}^{2} + 3 = 6 \quad , \quad \boxed{(0,6)}$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \overbrace{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)}^{-0.5} + \overbrace{2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}^{-1} + 3 = 1.5 \quad , \quad \boxed{\left(\frac{2\pi}{3}, 1.5\right)}$$

$$f(\pi) = \overbrace{\cos(2\pi)}^{1} + \overbrace{2\cos(\pi)}^{-2} + 3 = 2 \quad , \quad \boxed{(\pi, 2)}$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \overbrace{\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)}^{-0.5} + \overbrace{2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)}^{-1} + 3 = 1.5 \quad \boxed{\left(\frac{4\pi}{3}, 1.5\right)}$$

$$f(2\pi) = \overbrace{\cos(4\pi)}^{1} + \overbrace{2\cos(2\pi)}^{2} + 3 = 6 \quad , \quad \boxed{(2\pi, 6)}$$

نجد نوع هذه النقاط:

		$60° = \frac{\pi}{3}$		$150° = \frac{5}{6}\pi$		$\frac{7}{6}\pi$		1.5π	
x	$x=0$	$0<x<\frac{2\pi}{3}$	$x=\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}<x<\pi$	$x=\pi$	$\pi<x<\frac{4\pi}{3}$	$x=\frac{4\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}<x<2\pi$	$x=2\pi$
f	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f`$	max	↘	min	↗	max	↘	min	↗	max

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+1\right) = -3.46$$

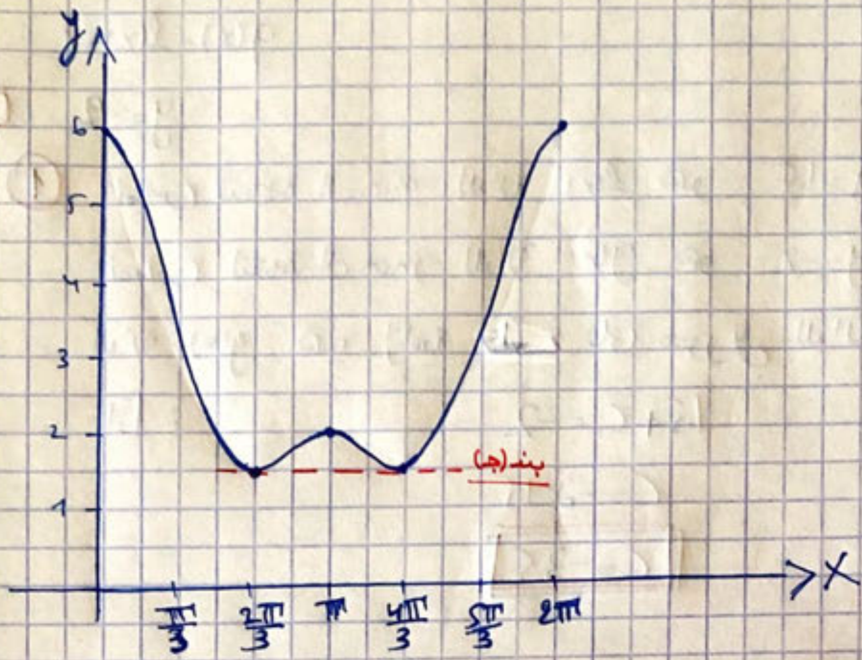
$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{5\cdot\pi}{6}\right)\left(2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+1\right) = 0.73$$

$$f'\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\left(2\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+1\right) = -0.73$$

$$f'(1.5\pi) = -2\sin(1.5\pi)(2\cos(1.5\pi)+1) = 2$$

$\boxed{\max(0,6)}$, $\boxed{\min\left(\frac{2\pi}{3}, 1.5\right)}$, $\boxed{\max(\pi, 2)}$, $\boxed{\min\left(\frac{4\pi}{3}, 1.5\right)}$, $\boxed{\max(2\pi, 6)}$ ←

(ب)



(ج) نجد معادلة المماس للدالة في النقاط $(\frac{4\pi}{3}, 1.5)$, $(\frac{2\pi}{3}, 1.5)$ (نقاط نهايتها الصغرى)

ميل المستقيم هو جواب المشتقة بهذه النقاط ⟵ نحسب البند (P) : ميل المماس = 0.

اذًا المماس يوازي محور X اذًا معادلة المماس $\boxed{y=1.5}$.

نحسب المساحة المحصورة بواسطة . التكامل :

$$S=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left(\cos(2x)+2\cos(x)+3-1.5\right)dx=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left(\cos(2x)+2\cos(x)+1.5\right)dx=$$

$$=\left[\frac{\sin(2x)}{2}+2\sin(x)+1.5x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)+1.5\cdot\frac{4\pi}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+1.5\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=4.984-4.44=\boxed{0.544}$$

وحدات مساحة

$g(x) = f(x) + C$

(د) $y = -2$

① المماس لنقطة ال min للدالة $f(x)$ هو $y = 1.5$.

المماس لنقطة ال min للدالة $g(x)$ هو $y = -2$.

الدالة $g(x)$ هي ازاحة على محور y للدالة $f(x)$ (الازاحة $= C$)

اذاً : $1.5 + C = -2$

$C = -2 - 1.5$

$\boxed{C = -3.5}$

②

$$g(x) = \overbrace{\cos(2x) + 2\cos(x) + 3}^{f(x)} - 3.5$$

$$g(x) = \cos(2x) + 2\cos(x) - 0.5$$

من الازاحة نحصل ان : النقاط القصوى للدالة $f(x)$: $(\frac{4\pi}{3}, 1.5)$, $(\frac{2\pi}{3}, 1.5)$, $(\pi, 2)$

يقعون تحت محور X ، : النقاط القصوى للدالة $g(x)$ التي يقعون

تحت محور X : $(\frac{\pi}{2}, 2-3.5) = \boxed{(\frac{\pi}{2}, -1.5)}$

$(\frac{2\pi}{3}, 1.5-3.5) = \boxed{(\frac{2\pi}{3}, -2)}$

$(\frac{4\pi}{3}, 1.5-3.5) = \boxed{(\frac{4\pi}{3}, -2)}$

والاطراف (نقاط القصوى على الاطراف) يقعون فوق محور X :

$(0, 6 - \underbrace{3.5}_{\text{ازاحة للدالة } f}) = \boxed{(0, 2.5)}$

$(2\pi, 6-3.5) = \boxed{(2\pi, 2.5)}$

اذاً من هنا نستنتج انه للرسم البياني $g(x)$ نقطتان تقاطع

مع محور X

سؤال ٦:

(أ) الدالة $f(x)$ تصاعدية في المجالات التي بهم المشتقة موجبة. وتنازلية في المجالات التي بهم المشتقة سالبة

حسب الرسم البياني:

مجالات موجبة للمشتقة: $\boxed{x\neq 0 , x<a}$ = مجالات تصاعدية للدالة

مجالات سالبة للمشتقة: $\boxed{x>a}$ = مجالات تنازلية للدالة

من هنا:

الدالة تصاعدية: $\boxed{x<0 , 0<x<a}$

الدالة تنازلية: $\boxed{x>a}$

(ب) ①

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{1-e^{x}}$$

نجد نقاط غير معرفة للدالة: المقام = صفر:

$1-e^{x}=0$

$e^{x}=1=e^{0}$

$\boxed{x=0}$

من هنا معادلة خط التقارب:

$$f(0)=\frac{e^{2\cdot 0}}{1-e^{0}}=\frac{e^{0}}{1-e^{0}}=\frac{1}{0}$$ خط تقارب صفر عامودي

اذاً: $\boxed{x=0 \text{ , خط تقارب عامودي}}$

② الرسم البياني للدالة $f(x)$ لا يقطع محور x لانه لا يوجد x ... يخص ... من تعويضه في الدالة على البسط $=0$ (لكل x $e^{2x}\neq 0$)

لذلك الدالة لا تقطع محور x.

e هو عدد موجب لذلك لكل x البسط هو موجب ولا يساوي صفر.

(جـ) نجد اولاً المشتقة :

$$f'(x) = \frac{e^{2x}\cdot 2(1-e^{x}) - (-e^{x})\cdot e^{2x}}{(1-e^{x})^{2}} = \frac{2e^{2x} - 2e^{3x} + e^{3x}}{(1-e^{x})^{2}} = \boxed{\frac{2e^{2x} - e^{3x}}{(1-e^{x})^{2}}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{2x}(2-e^{x})}{(1-e^{x})^{2}}}$$

نجد نقاط شك لنقاط قصوى : $\underline{f'(x)=0}$: (البسط =0).

$$0 = e^{2x}(2-e^{x})$$

$e^{2x} > 0$ لكل x

$$2-e^{x} = 0$$

$$e^{x} = 2$$

$$\boxed{x = \ln(2) = 0.693}$$

نجد احداثي y للنقطة $x=0.693$:

$$f(0.693) = \frac{e^{2\cdot 0.693}}{1-e^{0.693}} = \frac{4}{1-2} = \underline{\underline{-4}}$$

$$\boxed{(\ln(2), -4)} \Leftarrow$$

	$x<0$ (-1)	$x=0$	$0<x<\ln$ (0.5)	$x=\ln(2)$	$x>\ln(2)$ (1)
$f'(x)$	+	/	+	0	−
$f(x)$	↗	//	↗	max	↘

$$f'(-1) = \frac{e^{-2}(2-e^{-1})}{(1-e^{-1})^{2}} = +$$

$$f'(0.5) = \frac{e(2-e^{0.5})}{(1-e^{0.5})^{2}} = +$$

$$f'(1) = \frac{e^{2}(2-e)}{(1-e)^{2}} = -$$

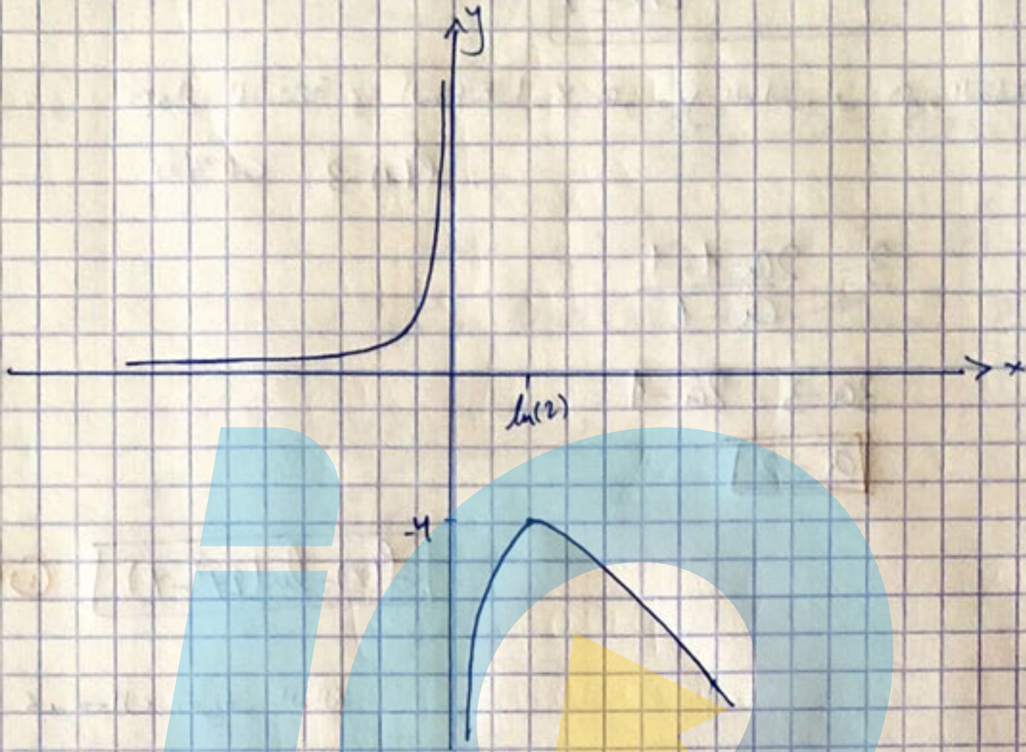
من هنا نخلص على ان النقطة $(\ln(2),-4)$ نقطة max للدالة

وبما ان المشتقة في النقطة $(a,0)$ تقطع محور x اذاً :

$\boxed{\ln 2 = a}$

لان المشتقة لديها نقطة صفرية في النقطة القصوى للدالة .

(د)



(هـ) نحسب المساحة بواسطة التكامل :

$$S = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} (0 - f(x))dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} (-f(x))dx = \Big[-f(x)\Big]_{\ln(2)}^{\ln(3)} =$$

$$= -f(\ln(3)) - (-f(\ln(2))) = \frac{9}{2} - 4 = \boxed{0.5}$$

وحدات مساحة

سؤال 5:

$x<0$, $x>\frac{1}{a}$, $a>0$, $f(x)=\ln(ax^2-x)$

أ) نجد المشتقة:

$$\boxed{f'(x)=\frac{2ax-1}{ax^2-x}}$$

جواب المشتقة في النقطة $x=1$ هو ميل المماس في هذه النقطة:

نعوّض $f'(1)=3$:

$$3=\frac{2a\cdot1-1}{a-1}$$

$$3a-3=2a-1$$

$$\boxed{a=2}$$

ب) ① $\boxed{f(x)=\ln(2x^2-x)}$

نجد مجال تعريف الدالة:

$$2x^2-x>0$$

$$x(2x-1)=0$$

$x=\frac{1}{2}$ أو $x=0$

إذًا مجال تعريف الدالة $x>\frac{1}{2}$ أو $x<0$

(معطى)

إذًا، نحصل على $\boxed{x=0}$ و $\boxed{x=\frac{1}{2}}$ خطوط تقارب عامودية.

② $f(x)=0$:

$$\ln(1)=0=\ln(2x^2-x)$$

$$2x^2-x=1$$

$$2x^2-x-1=0$$

$$\frac{1\pm\sqrt{1-4(2)(-1)}}{4}=\frac{1\pm3}{4} \to \boxed{1} , \boxed{-\frac{1}{2}}$$

اذاً تقاطع الدالة مع محور X: $\boxed{(1,0)}$ ، $\boxed{(-\frac{1}{2},0)}$

③ المشتقة (من بند P):

$$\boxed{f'(x)=\frac{4x-1}{2x^2-1}}$$

$f'(x)=0$ في احداثي $x=\frac{1}{4}$.

لكن $x=\frac{1}{4}$ هي خارج مجال تعريف الدالة.

اذاً: مجالات تصاعد وتنازل الدالة عن طريق الجدول:

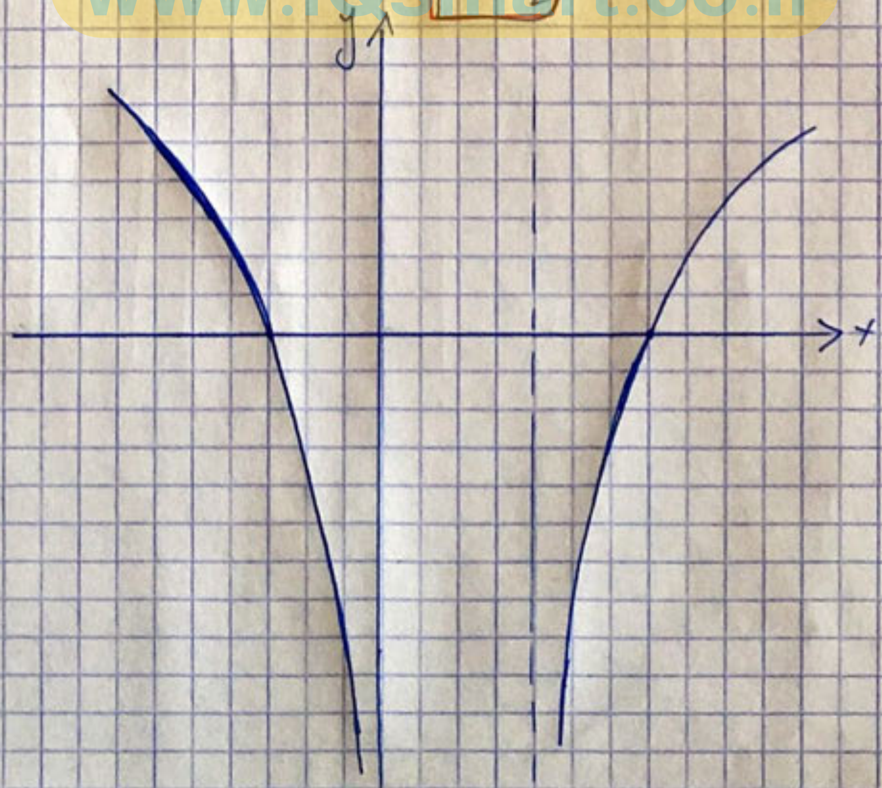
x	-1	$0<x<\frac{1}{2}$	1
f	-		+
f'	↘		↗

$f'(-1)=\frac{-4-1}{2-1}=-$

$f'(1)=\frac{4-1}{2-1}=+$

اذاً مجالات تنازل الدالة: $\boxed{x<0}$

مجال تصاعد الدالة: $\boxed{x>\frac{1}{2}}$



(ج)

(ج) النقاط القصوى للدالة $g(x)$ هم النقاط الصفرية للدالة $f(x)$ $(g'(x)=f(x)=0)$

اذا في النقطة $x=-\frac{1}{2},1$ للدالة $g(x)$ نقطة قصوى.

حسب الرسم البياني $f(x)$ موجبة على يسار $x=-\frac{1}{2}$ وسالبة على يمين النقطة. اذا $x=-\frac{1}{2}$ نقطة max ($g(x)$ تصاعدية على يسار النقطة وتنازلية على يمينها).

وبالنسبة للنقطة $x=1$, $f(x)$ موجبة على يمين النقطة اذا $g(x)$ تصاعدية على يمين النقطة , و سالبة على يسار النقطة , اذا $g(x)$ تنازلية على يسار النقطة , اذا $x=1$ نقطة min للدالة $g(x)$